Autoevaluación

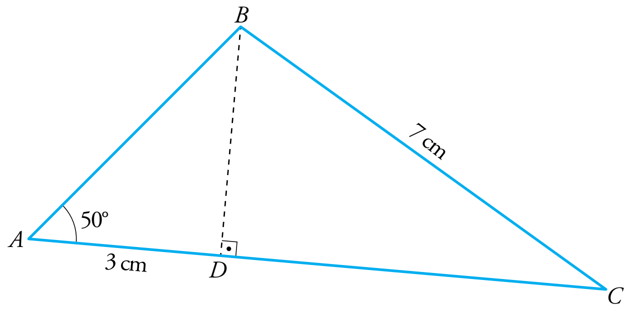
Página 166

1 **Halla el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm.**

El ángulo central del pentágono regular es $\frac{360°}{5} = 72°$.

Si l representa al lado: $sen\, 36° = \frac{l/2}{8} \to l = 16\, sen\, 36° = 9,4$ cm

2 **Calcula los lados y los ángulos del triángulo *ABC*.**



$cos\, 50° = \frac{3}{\overline{AB}} \to \overline{AB} = \frac{3}{cos\, 50°} = 4,67$ cm

$tg\, 50° = \frac{\overline{BD}}{3} \to \overline{BD} = 3 \cdot tg\, 50° = 3,58$ cm

$\overline{DC}^2 + 3,58^2 = 7^2 \to \overline{DC} = \sqrt{7^2 - 3,58^2} = 6,02$ cm

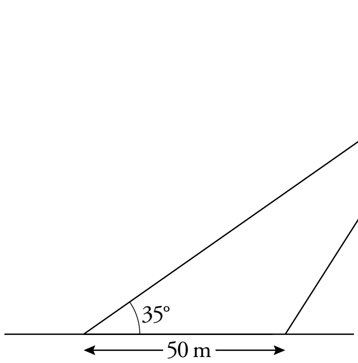
$\overline{AC} = 3 + 6,02 = 9,02$ cm

$sen\, \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{3,58}{7} = 0,511$

$\hat{C} = 30°\ 43'\ 49''$

$\hat{B} = 180° - 50° - 30°\ 43'\ 49'' = 99°\ 16'\ 10''$

3 **Un globo aerostático está sujeto al suelo en dos puntos que distan entre sí 50 m. El cable más corto mide 75 m y el más largo forma un ángulo de 35° con el suelo. Halla la altura a la que se encuentra el globo y la longitud del cable más largo.**



Llamemos h a la altura del globo y x a la distancia desde la base de esa altura hasta el cable más corto.

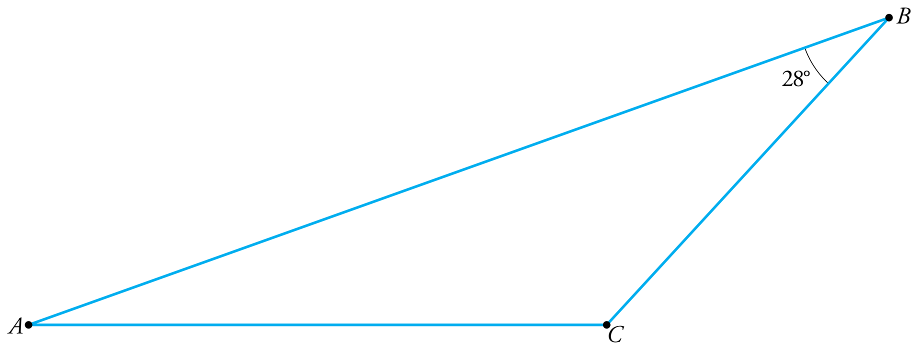
$$\begin{cases} tg\, 35° = \frac{h}{50 + x} \to h = tg\, 35° (50 + x) \to h = 0,7(50 + x) \to h = 3,5 + 0,7x \\ x^2 + h^2 = 75^2 \end{cases}$$

$x^2 + (3,5 + 0,7x)^2 = 75^2 \to 1,49x^2 + 4,9x - 5612,75 = 0$, que da lugar a una solución válida, $x = 59,7$ m.

La altura del globo es h = 3,5 + 0,7 · 59,7 = 45,29 m

La longitud del cable más largo es $\sqrt{(50 + 59,7)^2 + 45,29^2} = 118,68$ m

4 **En un triángulo ABC conocemos $\overline{AC}$ = 115 m, $\overline{BC}$ = 83 m y $\widehat{ABC}$ = 28°. Calcula los demás elementos del triángulo. ¿Podemos asegurar que $\overline{AB} > \overline{AC}$?**



$$\frac{115}{sen\ 28°} = \frac{83}{sen\ \hat{A}} \to sen\ \hat{A} = \frac{83 \cdot sen\ 28°}{115} = 0,34 \to \hat{A} = 19°\ 52'\ 37''$$

$$\hat{C} = 180° - (28° + 19°\ 52'\ 37'') = 132°\ 7'\ 23''$$

$$\frac{115}{sen\ 28°} = \frac{\overline{AB}}{sen\ \widehat{C}} \to \overline{AB} = \frac{115 \cdot sen\ \widehat{C}}{sen\ 28°} = 181,7 \text{ m}$$

Sí podemos asegurarlo porque los ángulos opuestos respectivos cumplen que $\hat{C} > \hat{B}$.

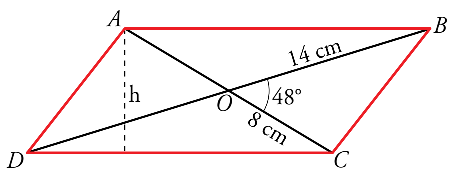
5 **Justifica si existe algún ángulo α tal que $tg\ \alpha = \frac{2}{3}$ y $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$.**

$$tg\ \alpha = \frac{2}{3} \to \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{2}{3} \to cos\ \alpha = \frac{3}{2} sen\ \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{16} \neq 1$$

No se satisface la identidad fundamental, luego no existe tal ángulo.

6 **Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48°. Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.**



Utilizamos el teorema del coseno en los triángulos BOC y AOB.

$$\overline{BC}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8\ cos\ 48° \to \overline{BC} = 10,49 \text{ cm}$$

$$\overline{AB}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8\ cos\ (180° - 48°) \to \overline{AB} = 20,25 \text{ cm}$$

Perímetro = (10,49 + 20,25) · 2 = 61,48 cm

Para hallar el área, necesitamos conocer un ángulo del paralelogramo.

Hallamos el ángulo $\hat{A}$ del triángulo AOB.

$$\frac{14}{sen\ \widehat{BAO}} = \frac{20,35}{sen\ 132°} \to sen\ \widehat{BAO} = \frac{14 \cdot sen\ 132°}{20,25} \to \widehat{BAO} = 30°\ 54'\ 57''$$

En el triángulo ACD, hallamos la altura.

$$\widehat{BAO} = \widehat{ACD} \to sen\ 30°\ 54'\ 57'' = \frac{h}{16} \to h = 8,22 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{20,25 \cdot 8,22}{2} = 83,23 \text{ cm}^2$$

7 **Busca, en cada caso, un ángulo del primer cuadrante que tenga una razón trigonométrica igual que el ángulo dado y di cuál es esa razón.**

a) $\mathbf{297°}$ **b)** $\mathbf{1\,252°}$ **c)** $\mathbf{-100°}$ **d)** $\mathbf{\dfrac{13\pi}{5}}$

a) $297° = 360° - 63° \to \cos 297° = \cos 63°$

b) $1\,252° = 360° \cdot 3 + 172°$; $172° = 180° - 8°$; $\text{sen}\ 1\,252° = \text{sen}\ 8°$

c) $-100° + 360° = 260°$; $260° = 180° + 80°$; $\text{tg}\,(-100°) = \text{tg}\ 80°$

d) $\dfrac{13\pi}{5} = 2\pi + \dfrac{3\pi}{5}$; $\dfrac{3\pi}{5} = \pi - \dfrac{2\pi}{5}$; $\text{sen}\ \dfrac{13\pi}{5} = \text{sen}\ \dfrac{2\pi}{5}$

8 **Si** $\mathbf{tg\ \alpha = 2}$ **y** $\mathbf{cos\ \alpha > 0}$**, halla:**

a) $\cos 2\alpha$ **b)** $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **c)** $\text{sen}\ \dfrac{\alpha}{2}$ **d)** $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

$\text{tg}\ \alpha = 2$ y $\cos \alpha > 0$, α está en el primer cuadrante.

$$1 + \text{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \to 5 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \to \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \to \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg}\ \alpha \to \frac{\text{sen}\ \alpha}{\sqrt{5}/5} = 2 \to \text{sen}\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2\ \alpha = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

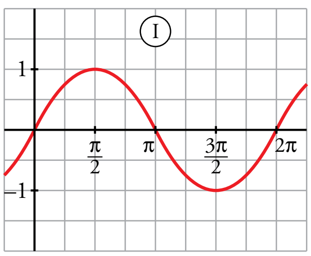
b) $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

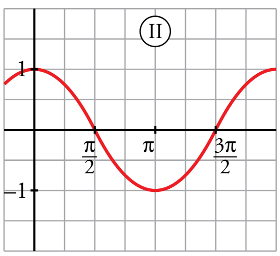
c) $\text{sen}\ \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - (\sqrt{5}/5)}{2}} = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}}$

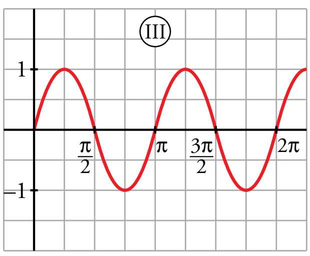
d) $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{\text{tg}\ \dfrac{\pi}{4} + \text{tg}\ \alpha}{1 - \text{tg}\ \dfrac{\pi}{4} \cdot \text{tg}\ \alpha} = \dfrac{1 + 2}{1 - 2} = -3$

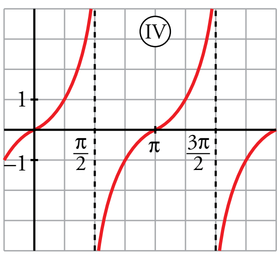
9 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

a) $y = \text{tg}\ x$ **b)** $y = \text{sen}\ 2x$ **c)** $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$









a) → IV b) → III c) → I d) → II

10 **Demuestra las siguientes identidades:**

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = tg\, x$

a) $\cos^4 x - sen^4 x = (\cos^2 x + sen^2 x)(\cos^2 x - sen^2 x) = \cos^2 x - sen^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 2tg\, x \frac{1 + \cos x}{2} - sen\, x = tg\, x + tg\, x \cos x - sen\, x = tg\, x + \frac{sen\, x}{\cos x} \cos x - sen\, x = tg\, x$

11 **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $2sen\, x + \cos x = 1$

b) $2sen^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

a) $2sen\, x + \cos x = 1 \rightarrow (2\, sen\, x)^2 = (1 - \cos x)^2 \rightarrow 4sen^2 x = 1 + \cos^2 x - 2\cos x \rightarrow$

$\rightarrow 5\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -3/5 \end{cases}$

$\cos x = 1 \rightarrow x_1 = 0° + 360° \cdot k;\ \ k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Vale.

$\cos x = -\frac{3}{5} \begin{cases} x_2 = 126° 52' 12'' + 360° k, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Vale.} \\ x_3 = 233° 7' 48'' \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$

Hemos comprobado las soluciones en la ecuación dada.

b) $2sen^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0 \rightarrow 2\frac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - sen^2 x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = 90° + 360° k;\ x = 270° + 360° k \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 0° + 360° k \end{cases}$

12 **Dado el número complejo $z = 3_{60°}$, expresa en forma polar el conjugado, el opuesto y el inverso.**

$\overline{z} = 3_{360° - 60°} = 3_{300°}$

$-z = 3_{60° + 180°} = 3_{240°}$

$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{3_{60°}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-60°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{300°}$

13 **Simplifica: $\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$**

$i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = -1;\ i^7 = i^4 \cdot i^2 \cdot i = -i$

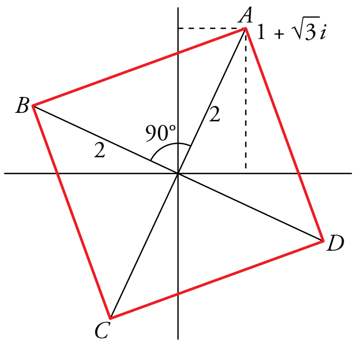
$i^{33} = (i^4)^8 \cdot i = i$

$\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}} = \frac{-1 - 2(-i)}{2 + i} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = \frac{(-1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-2 + i + 4i - 2i^2}{(2)^2 - (i)^2} = \frac{5i}{5} = i$

14 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $-1 + \sqrt{3}i$ y $-1 - \sqrt{3}i$.**

$[x - (-1 + \sqrt{3}i)][x - (-1 - \sqrt{3}i)] = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$

15 **Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}\,i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.**



Hacemos giros de 90°. Para ello, multiplicamos por $1_{90°}$:

$A = 1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$ $\qquad$ $B = 2_{60°} \cdot 1_{90°} = 2_{150°}$

$C = 2_{150°} \cdot 1_{90°} = 2_{240°}$ $\qquad$ $D = 2_{240°} \cdot 1_{90°} = 2_{330°}$

$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \to \overline{AB} = 2\sqrt{2}$ u

16 **Calcula a y b para que se verifique esta igualdad:**

$$\frac{a-2i}{3-i} = \frac{b-i}{5}$$

$$\frac{a-2i}{3-i} = \frac{b-i}{5} \to 5(a-2i) = (b-i)(3-i) \to 5a - 10i = 3b - bi - 3i + i^2 \to$$

$$\to 5a - 10i = 3b - 1 + (-b-3)\,i \to \begin{cases} 5a = 3b - 1 \\ -10 = -b - 3 \end{cases} \to a = 4,\ b = 7$$

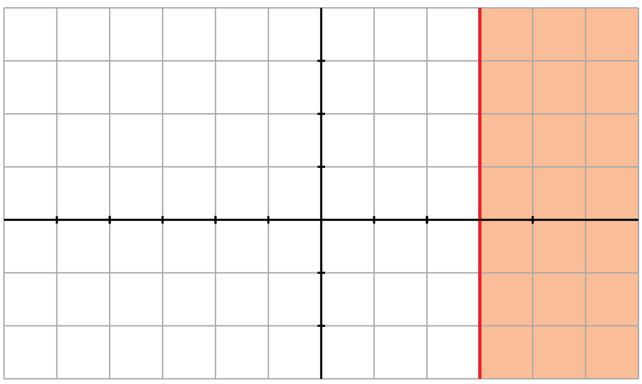
17 **Resuelve la ecuación $2z^2 + 8 = 0$.**

$2z^2 + 8 = 0 \to z^2 = -4 \to z = \pm\sqrt{-4} = \pm\,2i \to z_1 = 2i;\ z_2 = -2i$

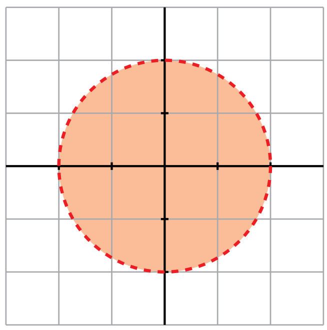
18 **Representa gráficamente:**

a) $Re(z) \geq 3$ $\qquad$ **b)** $|z| < 2$ $\qquad$ **c)** $z - \bar{z} = -4i$

a)



b)



c) Si $z = a + bi \to z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$

$z - \overline{z} = -4i$

Por tanto: $2bi = -4i \to b = -2$